1) $a \le b \le b \vee d \quad \cdots ①$
$c \le d \le b \vee d \quad \cdots ②$
$\Rightarrow a \vee c \le b \vee d$

$a \wedge c \le a \le b \quad \cdots ①$
$a \wedge c \le c \le d \quad \cdots ②$
$\Rightarrow a \wedge c \le b \wedge d$

2) $m \neq 0$ olsun. O halde $\exists\, k \in \mathbb{N} \ni m = k^+$

$m + n = 0 \Rightarrow n + m = n + k^+ = (n+k)^+ = 0$ (çelişki)

$\therefore m = 0$

benzer şekilde $n \neq 0$ iamde çelişki elde edilir.

$\therefore m = 0,\ n = 0$

3) $\forall [a,b] \in \mathbb{Z}$ için $[a,b][u,v] = [a,b]$ koşulunu sağlayan $[u,v] \in \mathbb{Z}$ yi bulalım.

$[a,b][u,v] = [au + bv,\ av + bu] = [a,b]$

$\Leftrightarrow au + bv + b = av + bu + a$
$\Leftrightarrow au + b(v+1) = av + a + bu$
$\Leftrightarrow au + b(v+1) = a(v+1) + bu$
$\Leftrightarrow v + 1 = u$

$[u,v] = [v+1, v]$

4) $x = [(m,n)]$ olsun.

$[(2,1)] + x = [(0,3)] \Rightarrow [(2,1)] + [(m,n)] = [(0,3)]$
$\Rightarrow [(2n+m, n)] = [(0,5)]$
$\Rightarrow (2n+m) \cdot 3 = n \cdot 0 = 0$
$\Rightarrow m = -2n$

$x = [(m,n)] = [(-2n, n)] = [(-2,1)]$

5.) $\alpha\beta = \{pq : p \in \alpha,\ p \geq 0,\ q \in \beta,\ q \geq 0\} \cup \mathbb{Q}^-$

$= \{qp : q \in \beta,\ q \geq 0,\ p \in \alpha,\ p \geq 0\} \cup \mathbb{Q}^-$

$= \beta\alpha$